1978年试题

注意事项:

1.理工科考生要求除作(一)——(四)题和(七)题外,再由(五)、(六)两题中选作一题.文科考生要求作(一)——(四)题,再由(五)、(六)两题中选作一题;不要求作第(七)题.

2.考生解题作答时,不必抄题.但须准确地写明题号,例如(一)2、(五)等.

(一)1.分解因式:$x^2-4xy+4y^2-4z^2$.

2.已知正方形的边长为 a.求侧面积等于这个正方形的面积、高等于这个正方形边长的直圆柱体的体积.

3.求函数$y=\sqrt{\lg(2+x)}$的定义域.

4.不查表求$\cos80^\circ\cos35^\circ+\cos10^\circ\cos55^\circ$的值.

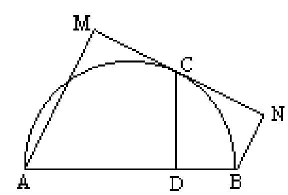
5.化简:$(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$.

(二)已知方程$kx^2+y^2=4$,其中k为实数.对于不同范围的k值,分别指出方程所代表图形的类型,并画出显示其数量特征的草图.

(三)(如图)AB是半圆的直径,C是半圆上一点,直线MN切半圆于C点,AM⊥MN于M点,BN⊥MN于N点,CD⊥AB于D点.

求证:1)CD=CM=CN;

2)$CD^2=AM\cdot BN$.



(四)已知$\log_{18}9=a(a\neq2)$,$18^b=5$.求$\log_{36}45$.

(五)(本题和第(六)题选作一题)已知△ABC的三内角的大小成等差数列,$\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$.求角A、B、C的大小.又知顶点C的对边c上的高等于$4\sqrt{3}$.求三角形各边a、b、c的长.(提示:必要时可验证$(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$.)

(六)已知α、β为锐角,且

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1,$$
$$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0.$$

求证:$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$

(七)(文科考生不要求作此题)

已知函数$y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$(m为实数).

(1)m是什么数值时,y的极值是0?

(2)求证:不论m是什么数值,函数图象(即抛物线)的顶点都在同一条直线l_1上.画出m=-1、0、1时抛物线的草图,来检验这个结论.

(3)平行于 l_1 的直线中,哪些与抛物线相交,哪些不相交?求证:任一条平行于 l_1 而与抛物线相交的直线,被各抛物线截出的线段都相等.

1978 年试题答案

(一)1. 解:原式 $=(x^2-4xy+4y^2)-4z^2$

$=(x-2y)^2-(2z)^2$

$=(x-2y-2z)(x-2y+2z)$.

2. 解:设直圆柱体的底面半径为 r.则底面周长 $2\pi r=a$.

$$\therefore r=\frac{a}{2\pi},$$

$$\therefore 体积=\pi r^2 a=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 a=\frac{a^3}{4\pi}.$$

3. 解:$\because \lg(2+x)\geqslant 0$, $\therefore 2+x\geqslant 1$.

$x\geqslant -1$ 为所求的定义域.

4.解法一:原式 $=\sin 10^\circ\cos 35^\circ+\cos 10^\circ\sin 35^\circ$

$=\sin(10^\circ+35^\circ)$

$=\sin 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解法二:原式 $=\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\sin 80^\circ\sin 35^\circ$

$=\cos(80^\circ-35^\circ)$

$=\cos 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.解:原式 $=(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}}{(10^{-1})^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

$=\dfrac{2\cdot 2^3}{10^2}\cdot a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}+2}$

$=\dfrac{4}{25}b^{\frac{1}{2}}$.

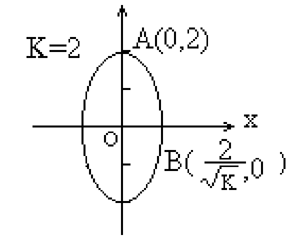
(二)解:**(注意:只要求考生作出全面而正确的分析,不要求写法和本题解完全一致.)**

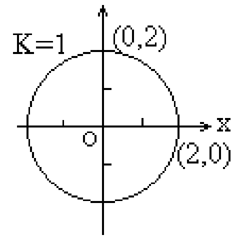
(1)$k>0$ 时,方程的图形是椭圆,中心在坐标原点:

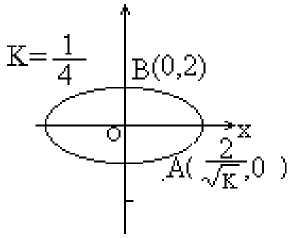
(i)$k>1$ 时,长轴在y轴上,半长轴 $=2$,半短轴 $=\dfrac{2}{\sqrt{k}}$;

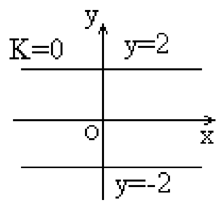
(ii)$k=1$ 时,椭圆的特殊情况——圆,半径 $r=2$;

(iii)$k<1$ 时,长轴在x轴上,半长轴 $=\dfrac{2}{\sqrt{k}}$,半短轴 $=2$.

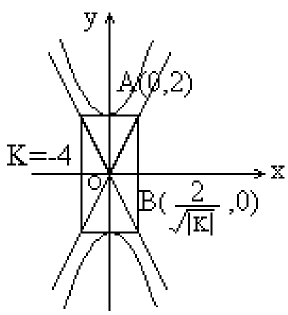


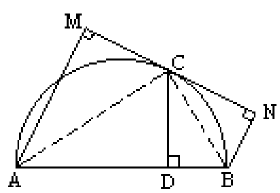






(2)$k=0$时,方程为$y^2=4$,
图形是两条平行于x轴的直线$y=\pm 2$;
(3)$k<0$时,方程为$-\frac{x^2}{\frac{4}{|k|}}+\frac{y^2}{4}=1$,
图形是双曲线,中心在坐标原点,实轴在y轴上.





（三）证明:
1)连 CA、CB,则∠ACB=90°.
∠ACM=∠ABC（弦切角等于同弧上的圆周角）,
∠ACD=∠ABC（同角的余角相等）,
∴ ∠ACM=∠ACD.
∴ △ACM≌△ADC.
∴ CM=CD.
同理 CN=CD.∴ CD=CM=CN.
2)∵ CD⊥AB,∠ACB=90°,
∴ CD^2=AD·DB（比例中项定理）.
由 1),可知 AM=AD,BN=BD,
∴ CD^2=AM·BN.
（四）解法一:∵$\log_{18}9=a$,∴$18^a=9$.
又 $18^b=5$,
∴ $45=9\times5=18^a\cdot18^b=18^{a+b}$,
设 $\log_{36}45=x$,则 $36^x=45=18^{a+b}$,

∴ $\log_{18}36^x=\log_{18}18^{a+b}$

$$x=\frac{a+b}{\log_{18}36}=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}.$$

但 $36=2\times18=4\times9$,

∴ $\log_{18}(2\times18)=\log_{18}(2^2\times9)$.

即 $1+\log_{18}2=2\log_{18}2+\log_{18}9=2\log_{18}2+a$.

∴ $\log_{18}2=1-a$.

∴ $$x=\frac{a+b}{1+(1-a)}=\frac{a+b}{2-a}.$$

解法二:$\log_{36}45=\dfrac{\log_{18}45}{\log_{18}36}$

$$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}18+\log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}.$$

以下解法同解法一.

（五）解:A+B+C=180°,

又 2B=A+C.

∴ 3B=180°,B=60°,A+C=120°.

∵ $\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$ (1)

而 $\mathrm{tg}(A+C)=\dfrac{\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}C}{1-\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C}$,

∴ $$\begin{aligned}\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}C&=(1-\mathrm{tg}A\mathrm{tg}C)\mathrm{tg}(A+C)\\&=[1-(2+\sqrt{3})]\mathrm{tg}120^\circ\\&=(-1-\sqrt{3})(\sqrt{-3})\\&=3+\sqrt{3}.\end{aligned}\qquad(2)$$

由(1),(2)知$\mathrm{tg}A$、$\mathrm{tg}C$是$x^2-(3+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$的二根.

解这方程得$(x-1)[x-(2+\sqrt{3})=0$.

∴ $x_1=1,x_2=2+\sqrt{3}$.

设$A<C$,则得$\mathrm{tg}A=1,\mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$.

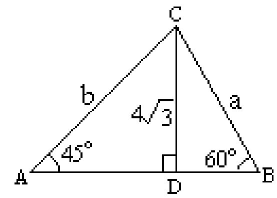
∴ $A=45^\circ,c=120^\circ-45^\circ=75^\circ$.

又知c边上的高等于$4\sqrt{3}$,

∴ $$a=\frac{4\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8;$$

$$b=\frac{4\sqrt{3}}{\sin45^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6};$$

$$\begin{aligned}c&=AD+DB\\&=b\cos45^\circ+a\cos60^\circ\\&=4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+8\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{3}+4.\end{aligned}$$



（六）证法一: 由$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$, 得$3\sin^2\alpha=\cos 2\beta$

由$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$, 得

$$\sin 2\beta=\frac{3}{2}\sin 2\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\therefore\ \sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=9\sin^2 a\cos^2 a+9\sin^4 a,$$

$$1=9\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha),$$

$$1=9\sin^2\alpha.$$

$\therefore$ $\sin^2\alpha=\frac{1}{9}, \sin\alpha=\frac{1}{3}$（α为锐角）.

$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\cos 2\beta+\cos\alpha\sin 2\beta$$
$$=\sin\alpha(3\sin^2\alpha)+\cos\alpha(3\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$=3\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$
$$=3\sin\alpha=1.$$

$$\therefore\ \alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}.$$

证法二: 由$3\sin 2\alpha=2\sin 2\beta$得

$$3\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\beta\cos\beta.$$

$$\therefore\ 9\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\sin^2\beta\cos^2\beta.$$

$$9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta).$$

$$\because\ \sin^2\beta=\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha),$$

$$\therefore\ 9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=4\cdot\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)[1-\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)]$$
$$=2(1-3\sin^2\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+3\sin^2\alpha)$$
$$=1-9\sin^4\alpha.$$

$$\therefore\ 9\sin^2\alpha=1,$$

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$（α为锐角）

以下同证法一.

（七）解: (1)用配方法得

$$y=\left(x+\frac{2m+1}{2}\right)^2-\frac{4m+5}{4}$$

$\therefore$ y的极小值为$-\frac{4m+5}{4}$.

所以当极值为0时, $4m+5=0, m=-\frac{5}{4}$.

(2)函数图象抛物线的顶点坐标为$\left(-\frac{2m+1}{2},-\frac{4m+5}{4}\right)$,

即 $x=-\frac{2m+1}{2}=-m-\frac{1}{2}$,

$y=-\frac{4m+5}{4}=-m-\frac{5}{4}$.

二式相减得 $x-y=\frac{3}{4}$

此即各抛物线顶点坐标所满足的方程.它的图形是一条直线,方程中不含m.因此,不论m是什么数值,抛物线的顶点都在这条直线$l_1:x-y=\frac{3}{4}$上.

当m=-1、0、1时,x,y之间的函数关系为

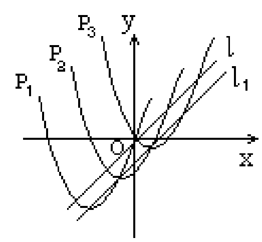
$$y+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$y+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$y+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2,$$

分别作出它们的图象 P_1、P_2、P_3.

它们的顶点都在直线 l_1 上.



(3)设 l:x-y=a 为任一条平行于 l_1 的直线.

与抛物线 $y=x^2+(2m-1)x+m^2-1$ 方程联立求解.

消去 y,得 $x^2+2mx+m^2-1+a=0$.

∴ $(x+m)^2=1-a$.

因而当 1-a≥0 即 a≤1 时,直线 l 与抛物线相交,而 1-a<0 即 a>1 时,直线 l 与抛物线不相交.

当$a\leqslant 1$时,$x=-m\pm\sqrt{1-a}$.

即直线 l 与抛物线两交点横坐标为

$$-m-\sqrt{1-a},-m+\sqrt{1-a}.$$

因直线 l 的斜率为 1,它的倾斜角为 45°.

∵ 直线 l 被抛物线截出的线段等于

$$[(-m+\sqrt{1-a})-(-m-\sqrt{1-a})]\sqrt{2}=2\sqrt{2(1-a)}.$$

而这与 m 无关.

因此直线 l 被各抛物线截出的线段都相等.